19/10/16

Αξιωματική Θεμελίωση Συνόλων κατά Neumann-Bernays-Gödel (NBG).

- Όροι της NBG θεωρίας ονομάζονται κλάσεις.

<u>Ορισμός</u>: Μία κλάση x καλείται σύνολο αν $\exists$ κλάση y ώστε $x \in y$.

- Αν μία κλάση δεν είναι σύνολο $\Rightarrow$ γνήσια κλάση.

<u>Αξίωμα 1</u>: $\forall x, y$ κλάσεις : $(x = y) \Leftrightarrow \left[(\forall z) : z \in x\right] \Leftrightarrow (z \in y)$.

<u>Αξίωμα 2</u>: $\forall$ ~~[illegible]~~ προτασιακό τύπο $P(x)$, υπάρχει μία κλάση που αποτελείται από τα σύνολα που καθιστούν το $P(x)$ αληθή πρόταση. (δηλ) $\forall P(x) : \exists \{x : P(x)\}$: σύνολο αλήθειας).

Αν $u \in \{x : P(x)\} \Rightarrow u$: σύνολο και $P(u)$: αληθής.

- Μία γνήσια κλάση $w \notin \{x : P(x)\}$, ~~[illegible]~~ ακόμη και αν $P(w)$ - αληθής.

$A^c = \{x : x \notin A\}$, $A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \cap B^c$.

$\emptyset = \{x : x \neq x\}$: κενή κλάση.

$V = \{x : x = x\}$: παγκόσμια κλάση
καθολική

$\boxed{A \in V \Leftrightarrow A : \text{σύνολο}}$

$\emptyset^c = V$, $V^c = \emptyset$.

• $\cup A = \{x : (\exists y)(y \in A) \wedge (x \in y)\}$

• $\cap A = \{x : (\forall y) : (y \in A) \Rightarrow (x \in y)\}$.

Άρα : $C \in \cup A \Leftrightarrow C$: σύνολο και C ανήκει τουλάχιστον σε μία κλάση του A.

Όμοια $C \in \cap A \Rightarrow C$: σύνολο και C ανήκει σε κάθε κλάση του A.

Ασκ 1) Νδο (i) $\cap \emptyset = V$ και $\cup \emptyset = \emptyset$.

Λύση : (i) Έστω $C \in \cap \emptyset$. Είναι $\cap \emptyset = \{x : (\forall y)(y \in \emptyset) \Rightarrow x \in y\}$

Είναι ~~...~~ $C \in \cap \emptyset \Leftrightarrow C$: σύνολο και $\forall y \in \emptyset \Rightarrow C \in y \Leftrightarrow$
$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} C$: σύνολο $\Leftrightarrow C \in V$

Άρα $\boxed{\cap \emptyset = V}$

(*) Η πρόταση $\forall y \in \emptyset \Rightarrow C \in y$ είναι κενή αλήθεια.

(ii). Έστω $\cup \emptyset \neq \emptyset$. Τότε $\exists$ κλάση C : $C \in \cup \emptyset$

Είναι $\cup \emptyset = \{x : (\exists y) : (y \in \emptyset) \wedge (x \in y)\}$

Αφού $C \in \cup \emptyset \Rightarrow \exists y \in \emptyset \wedge C \in y$, άτοπο διότι η κενή κλάση δεν περιέχει κανένα στοιχείο.

άρα $\boxed{\cup\emptyset=\emptyset}$.

$\longleftrightarrow$

Ορισμός: Αν A, B κλάσεις τότε A υποκλάση της B αν $A \subseteq B$ δηλ $(\forall x)((x \in A) \Rightarrow x \in B)$

* Αν A υποκλάση + σύνολο $\Rightarrow$ A: υποσύνολο.

Ιδιότητες: $A=B \Leftrightarrow (A\subseteq B) \wedge (B\subseteq A)$ | A, B, Γ κλάσεις.
$[(A\subseteq B) \wedge (B \subseteq \Gamma)] \Rightarrow A \subseteq \Gamma$

$\longleftrightarrow$

Άσκ. 6: α: σύνολο, B: κλάση, $\alpha \in B$. Νδο:
(i) $\alpha \subseteq \cup B$, (ii) $\cap B \subseteq \alpha$.

Λύση: (i) Έστω $x \in \alpha$. Τότε $\cup B = \{z : (\exists y)(y \in B \wedge z \in y)\}$.

Η πρόταση $(\alpha \in B)\wedge(x\in\alpha)$ είναι αληθής $\Rightarrow x \in \cup B$

Άρα $\boxed{\alpha \in \cup B}$

(ii) Έστω $x \in \cap B$.
Είναι $\cap B = \{z : (\forall y)(y \in B \Rightarrow z \in y)\}$
Αφού $x \in \cap B$ η πρόταση $y \in B \Rightarrow x \in y$ ισχύει $(\forall y) y \in B$ οπότε ισχύει και για $\alpha \in B$. Άρα $\boxed{\cap B \subseteq \alpha}$.

$\longleftrightarrow$

Ορισμός: Αν A: κλάση, τότε η κλάση $\mathcal{P}(A) := \{x : x \subseteq A\}$ ονομάζεται δυναμοκλάση της A.

δηλαδή $(y \subseteq x) \wedge (y \in V) \Leftrightarrow y \in \mathcal{P}(x)$.

$\longleftrightarrow$

Αξίωμα 3: Αν X: σύνολο, τότε $\exists y$: σύνολο που ~~περιέχει~~ τα στοιχεία του είναι κάθε υποκλάση του X.

Πόρισμα: Αν x: σύνολο τότε κάθε υποκλάση του x είναι υποσύνολο του x και θα ανήκει στην $\mathcal{P}(x)$

(Άρα η $\mathcal{P}(x)$ είναι το 'ΑΞ' του ΑΞ3 $\Rightarrow \mathcal{P}(x)$: σύνολο).

Ασκ. 7: Νδο: (i) $\bigcap V = \emptyset$, (ii) $V = \mathcal{P}(V)$.

Λύση: (i) Έστω ότι $\bigcap V \neq \emptyset$. Τότε $\exists x \in \bigcap V \Rightarrow x$: σύνολο

Γενικά $\emptyset \subseteq x$. Τότε από το ΑΞ3 η $\emptyset$ είναι σύνολο.

Άρα $\emptyset \in V$. Είναι $\bigcap V = \{z : (\forall y)(y \in V \Rightarrow z \in y)\}$.

Αφού $\emptyset \in V$ τότε η πρόταση $\emptyset \in V \Rightarrow x \in \emptyset$ είναι αληθής $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ άτοπο αφού $(\nexists x) : x \in \emptyset$

Άρα $\boxed{\bigcap V = \emptyset.}$

(ii) Έστω $x \in \mathcal{P}(V) \Rightarrow x$: σύνολο $\Rightarrow x \in V \Rightarrow \mathcal{P}(V) \subseteq V$ (1).

Έστω $x \in V \Rightarrow x$: σύνολο. Γενικά ισχύει ότι $x \subseteq V$

Άρα $x \in \mathcal{P}(V)$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow \boxed{V = \mathcal{P}(V)}$.

Ασκ. 8: Έστω Α: κλάση και $A \neq \emptyset$. Νδο $\bigcap A$: σύνολο.

Λύση: Έστω $\alpha \in A \Rightarrow \alpha$: σύνολο. Από Ασκ_6ii) ισχύει

ότι $\bigcap A \subseteq \alpha \Rightarrow$ Από ΑΞ3 $\Rightarrow \bigcap A$: σύνολο.

V: σύνολο ή γν. κλάση;

Έστω η κλάση $R = \{x : x \notin x\}$ Έστω R: σύνολο, τότε: • $R \in R \Rightarrow R \notin R$ · Άτοπο • $R \notin R \Rightarrow R \in R$ Άτοπο	$\Rightarrow$ R: γνήσια κλάση.

Ισχύει ότι $R \subseteq V$. Αν υποθ. ότι V: σύνολο $\overset{\text{ΑΞ.3}}{\Rightarrow}$ R: σύνολο Άτοπο

άρα $\boxed{\text{V: γνήσια κλάση}}$

Αξίωμα 4 : Αν x, y σύνολα τότε η κλάση

μη-διατεταγμένο ζεύγος $\leftarrow \{x, y\} := \{z : ((z = x) \vee (z = y))\}$ είναι σύνολο.

(*) Αν $x = y$, τότε το μη διατεταγμένο ζεύγος θα συμβ. $\{x\}$.

Αξίωμα 5 : Αν x : σύνολο, τότε η κλάση $\bigcup x$ είναι σύνολο.

Άσκηση (7): Νδο $\forall x, y$: σύνολα ισχύουν:

(i) $x \cup y = \bigcup \{x, y\}$

(ii) $\{x\} \cup \{y\} = \{x, y\}$.

Λύση : (i) Έστω $z \in (x \cup y) \Leftrightarrow (z \in x) \vee (z \in y) \xLeftrightarrow[y \in \{x, y\}]{x \in \{x, y\}}$

$\Leftrightarrow (\exists w)(w \in \{x, y\} \wedge z \in w) \Leftrightarrow z \in \bigcup \{x, y\}$

Παρατήρηση : Από Αξ4 $\Rightarrow \{x, y\}$: σύνολο
Από Αξ5 $\Rightarrow \bigcup \{x, y\}$: σύνολο $\Bigg] \Rightarrow \boxed{x \cup y : \text{σύνολο}}$

(ii) Έστω $z \in (\{x\} \cup \{y\}) \Rightarrow (z \in \{x\}) \vee (z \in \{y\}) \Leftrightarrow (z = x) \vee (z = y) \Leftrightarrow$

$\underset{Αξ.4}{\Leftrightarrow} z \in \{x, y\}$. Άρα $\boxed{\{x\} \cup \{y\} = \{x, y\}}$